<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

18 ΜΑΪΟΥ 2016

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 262.
Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 141.
Α3. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 246.
Α4. α) Λ, β) →Σ , γ) →Λ , δ) Σ, ε) → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

$$f(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f′	-	0	+
f	↘		↗

Τοπ. Ελάχιστο
f(0)=0

Έτσι προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$.

Β2. $$f''(x)=\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=\frac{(2x)'(x^2+1)^2-2x\left[(x^2+1)^2\right]}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)^2-8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)\left[2(x^2+1)-8x^2\right]}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)\left(2x^2+2-8x^2\right)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)(2-6x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)(1-3x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(x^2+1)^4}.$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f''(x)		-	0	+	0	-	
f(x)							

$$F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1/4 \qquad F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1/4$$

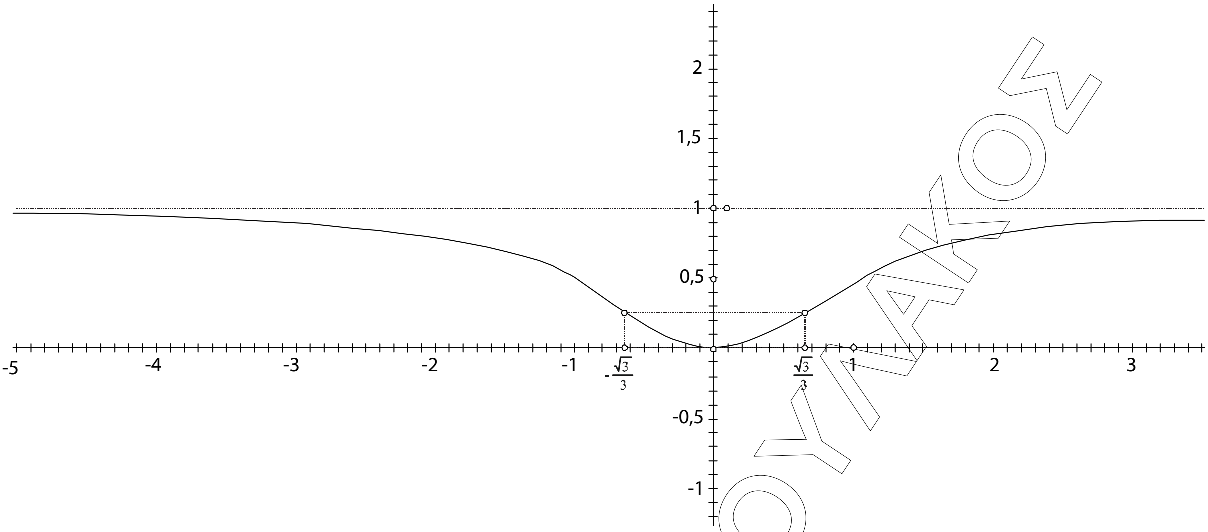
Προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στα $(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{3}][\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$, είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$,

ενώ παρουσιάζει Σ.Κ. στις θέσεις $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Β3 $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $K(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

$K(0)=e^0-1=0$

$K'(x)=2x\cdot e^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$

$K'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι:

$x^2>0\Leftrightarrow e^{x^2}>e^0\Leftrightarrow e^{x^2}>1\Leftrightarrow e^{x^2}-1>0$

Έτσι προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
2x	-	0	+
$e^{x^2}-1$	+	0	+
$K'(x)$	-	0	+
$K(x)$	↘	min=0	↗

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι $K(x) > 0$, ενώ $K(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Γ2 Για $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$: $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\neq 0$, λόγω του ερωτήματος Γ1.

Έτσι η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτά, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

- Για $x\in(0,+\infty)$: $\left(f(x)-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\right)\cdot\left(f(x)+\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\right)=0$ (1)

Αν $f(x)>0$, τότε επειδή $e^{x^2}-x^2-1>0$, από την (1) προκύπτει ότι

$f(x)-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)=0\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

Αν $f(x)<0$, τότε επειδή το $-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)<0$, από την (1) προκύπτει ότι

$f(x)+\left(e^{x^2}-x^2-1\right)=0\Leftrightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$.

- Για $x\in(-\infty,0)$

Αν $f(x)>0$, τότε από την (1) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

Αν $f(x)<0$, τότε από την (1) $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

Για $x=0$ είναι $f(0)=0$.

Έτσι προκύπτει ότι

α) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ ή

β) $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$ ή

γ) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0\end{cases}$ ή

δ) $f(x)=\begin{cases} -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x\geq 0\\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0\end{cases}$

Γ3. $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$

$f''(x)=2e^{x^2}+2xe^{x^2}\cdot 2x-2=2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2\cdot e^{x^2}$

Προκύπτει ότι $f''(0)=0$, ενώ επειδή στο ερώτημα Γ1, αποδείχθηκε ότι

$e^{x^2}-1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Είναι $f''(x)>0\Rightarrow\left(f''(x)\right)'>0$ *στο* $\mathbb{R}^*$, ενώ $f''(0)=0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα *στο* $\mathbb{R}$, άρα f κυρτή.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x+3)-f(x),\ x\in\mathbb{R}$

Είναι $g'(x)=f'(x+3)-f'(x)=3\dfrac{f'(x+3)-f'(x)}{(x+3)-x}=3f''(\xi)$,

όπου $\xi\in(x,\ x+3)$.

Άρα $g'(x) > 0$, για κάθε $x \in [0,+\infty)$, λόγω του Γ3.

Η $g(x)$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και 1-1.

Η δοθείσα εξίσωση τώρα γράφεται $g(|\text{ημ}x|) = g(x)$.

Αφού είναι 1-1, προκύπτει ότι $|\text{ημ}x| = x,\ x \in [0,+\infty) \Leftrightarrow |\text{ημ}x| = |x|,\ x \in [0,+\infty)$.

Η ισότητα αυτή ισχύει μόνον όταν $x = 0$ (σχολικό βιβλίο σελ. 170).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x) \right) \cdot \eta\mu x \, dx = \pi \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) \cdot \eta\mu x \, dx + \int_0^{\pi} f''(x) \cdot \eta\mu x \, dx = \pi \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \cdot (-\sigma\upsilon\nu x)' \, dx + \int_0^{\pi} \left(f'(x) \right)' \cdot \eta\mu x \, dx = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left[\sigma\upsilon\nu x \cdot f(x) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x) \, dx + \left[f'(x) \cdot \eta\mu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \sigma\upsilon\nu x \, dx = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1)$$

Είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \eta\mu x \right) = 1 \cdot 0 = 0$.

Αφού f συνεχής στο $x = 0 \Rightarrow f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Δηλαδή $f(0) = 0$.

Άρα από (1) $\Rightarrow f(\pi) = \pi$.

Έχουμε $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \dfrac{\eta\mu x}{x} = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{x}{\eta\mu x}}$, $x \neq 0$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{x}{\eta\mu x}} \right) = 1 \cdot \dfrac{1}{1} = 1$, άρα $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

Δηλαδή $f'(0) = 1$.

Δ2 **α)** Από την σχέση $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ παραγωγίζοντας έχουμε

$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) f'(x) + e^x$ (2)

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε από Θ.

Fermat $f'(x_0) = 0$ (3)

Από (2) για $x = x_0$ έχουμε:

$e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) f'(x_0) + e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 0$.

Επομένως θα είναι $f'(0)=0$, άτοπο διότι $f'(0)=1$.
Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Αφού η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη θα είναι $f'(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$. Όμως η f' είναι συνεχής αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι
$f'(0)=1>0 \Rightarrow f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$ δηλαδή η f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών το
$f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Όμως $f(R)=R \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Έχουμε $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| = \dfrac{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \dfrac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \dfrac{2}{|f(x)|}$

και αφού f αύξουσα, για $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0$.

Έτσι $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \leq \dfrac{2}{f(x)} \Leftrightarrow -\dfrac{2}{f(x)} \leq \dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \dfrac{2}{f(x)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{f(x)}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{f(x)}=0$.

Άρα από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

Δ4 Θέτω $\ln x = u \Rightarrow \dfrac{1}{x}\cdot dx = du$

Για $x=1 \Rightarrow u_1=\ln 1=0$

Για $x=e^{\pi} \Rightarrow u_2=\ln e^{\pi}=\pi$

Έτσι $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_0^{\pi} f(u)\,du$

Αρκεί να δείξουμε ότι $0<\displaystyle\int_0^{\pi} f(u)\,du<\pi^2$ (1)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi] \Rightarrow f(0)\leq f(x)\leq f(\pi)$

(η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\pi$ και για $x=0$)

$\Rightarrow f(x)\leq\pi \Rightarrow \pi-f(x)\geq 0$, $x\in[0,\pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi}(\pi-f(x))dx>0$ (γιατί η $\pi-f(x)$ δεν μηδενίζεται παντού στο $[0,\pi]$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \pi\, dx - \int_0^\pi f(x)\, dx > 0 \Rightarrow \pi^2 > \int_0^\pi f(x)\, dx \qquad (2)$$

Ομοίως $f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^\pi f(x)\, dx > 0$ (3)

Από (2), (3) $\Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(x)\, dx < \pi^2$ δηλαδή ισχύει η (1).